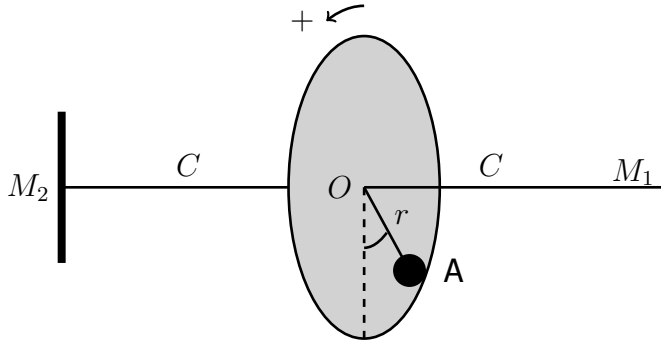


## تمارين في المتذبذبات الميكانيكية

نهمل جميع الاحتكاكات ونأخذ  $g = 10m/s^2$  و  $\pi^2 = 10$

نأخذ بكرة ( $\mathcal{P}$ ) عزم قصورها بالنسبة للمحور الدوران ( $\Delta$ ) المار من مركز قصورها  $O$  هو  $J_0 = 10^{-3}kg.m^2$ .



نثبت في مركزها  $O$  طرفي سلكي لي مماثلين و أفقيين ، كتلتاهما مهملتان ، ولهما نفس ثابتة اللي  $C$  . الطرفان الأخران للسلكين مثبتان بحاملين في النقطتين  $M_2$  و  $M_1$  . نثبت في نقطة من محيط البكرة وعلى المسافة  $r = 6cm$  من  $O$  جسما صلبا  $A$  كتلته  $m = 40g$  نعتبره نقطيا .

عزم قصور المجموعة البكرة والجسم  $A$  بالنسبة للمحور  $\Delta$  الذي يجسده السلكان هو :  $J_{\Delta} = J_0 + mr^2$

عند التوازن يكون السلكان غير ملتويين ويوجد الجسم  $A$  على الخط الرأسي المار من  $O$  .

انطلاقا من موضع التوازن ندير البكرة بالزاوية  $\theta_m = \pi/18rad$  في المنحنى الموجب ، ثم نحررها بدون سرعة بدئية في اللحظة  $t = 0$  . نعلم موضع  $A$  عند اللحظة  $t$  ، بالأصول الزاوي  $\theta$  الذي يكونه  $OA$  مع الخط الرأسي المار من  $O$  ( أنظر الشكل ) . نعتبر المجموعة  $S$  المكونة من البكرة - الجسم - سلكا اللي .

1 - اعتمادا على الدراسة الطاقية أوجد المعادلة التفاضلية لحركة البكرة والجسم  $A$  في حالة التذبذبات الصغيرة . نختار المستوى الأفقي الذي تنتمي إليه النقطة  $O$  مرجعا لطاقة الوضع الثقالية والحالة التي يكون فيها السلكان غير ملتويين مرجعا لطاقة وضع اللي .

2 - حدد ثابتة اللي  $C$  علما أن المدة الزمنية التي تستغرقها 10 تذبذبات هي  $\Delta t = 8s$  .

3 - أكتب المعادلة الزمنية للحركة .

4 - بين أن الطاقة الحركية للبكرة والجسم  $A$  تكتب على الشكل التالي :  $E_C = K(\theta_m^2 - \theta^2)$  . استنتج تعبير  $K$  بدلالة  $m$  و  $g$  و  $r$  و  $C$  .

5 - أوجد بدلالة  $K$  و  $m$  و  $g$  و  $r$  و  $\theta_m$  تعبير الطاقة الميكانيكية للمجموعة .

نأخذ :  $\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2}$

## الحل

1 - المعادلة التفاضلية لحركة المجموعة في حالة التذبذبات الصغيرة :  
لدينا الاحتكاكات مهملة أي أن الطاقة الميكانيكية للمجموعة تنحفظ :

$$E_m = Cte \implies \frac{dE_m}{dt} = 0$$

من جهة أخرى فإن تعبير الطاقة الميكانيكية للمجموعة هو :

$$E_m = E_C + E_p$$

بحيث أن الطاقة الحركية للمجموعة :  $E_C = \frac{1}{2}J_{\Delta}\dot{\theta}^2$  و  $E_p$  طاقة الوضع للمجموعة

$$E_p = E_{pp} + E_{pt}$$

$E_{pp}$  طاقة الوضع الثقالية للمجموعة وبتوجيه المحور  $Oz$  نحو الأعلى وفي الحالة المرجعية لدينا  $E_{pp} = 0$  عند  $z = z_{ref} = 0$  فإن  $E_{pp} = mgz$  بحيث أن  $z = -rcos\theta$  ومنه فإن  $E_{pp} = -mgrcos\theta$

## الحل

$E_{pt} = \frac{1}{2}C\theta^2 + \frac{1}{2}C\theta^2 = C\theta^2$  : طاقة الوضع للي للسلكين :  
وبالتالي فإن طاقة الوضع للمجموعة هي :

$$E_p = -mgr\cos\theta + C\theta^2$$

أي أن الطاقة الميكانيكية للمجموعة هي :

$$E_m = \frac{1}{2}J_\Delta\dot{\theta}^2 + C\theta^2 - mgr\cos\theta$$

في حالة التذبذبات ذات وسع صغير لدينا  $\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2}$  أي أن :

$$E_m = \frac{1}{2}(J_0 + mr^2)\dot{\theta}^2 + \left(C + \frac{1}{2}mgr\right)\theta^2 - mgr$$

أي أن :

$$\frac{dE_m}{dt} = \dot{\theta} \left( (J_0 + mr^2)\dot{\theta} + \frac{2C + mgr}{2}\theta \right) = 0$$

وبما أن  $\dot{\theta} \neq 0$  فإن :

$$\ddot{\theta} + \frac{2C + mgr}{2(J_0 + mr^2)}\theta = 0$$

2 - تحديد ثابتة اللي للسلك :

لدينا حسب المعادلة التفاضلية المحصل عليها في السؤال السابق :

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{2(J_0 + mr^2)}{2C + mgr}}$$

وبالتالي فإن :

$$C = \frac{8\pi^2(J_0 + mr^2)}{2T_0^2} - \frac{mgr}{2}$$

من جهة أخرى لدينا :  $10T_0 = 8$  أي أن  $T_0 = 0,8s$

تطبيق عددي :  $C = 0,2N.m/rad$

3 - المعادلة الزمنية للحركة :

بما أن المعادلة التفاضلية من الدرجة الثانية وخطية فإن حلها يكتب على الشكل التالي :

$$\theta(t) = \theta_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$$

لدينا عند اللحظة  $t = 0$  عندنا  $\theta(t = 0) = \theta_m = \pi/18rad$  أي أن  $\cos\varphi = 1$  وبالتالي فإن  $\varphi = 0$  ومنه فإن المعادلة الزمنية تكتب :

$$\theta(t) = \frac{\pi}{18}\cos(2,5\pi t)$$

**الحل**

4 - لنبين تعبير الطاقة الحركية للمجموعة :

لدينا الاحتكاكات مهملة أي أن هناك انحفاظ الطاقة الميكانيكية أي أن  $E_m = E_m(t = 0)$

$$E_m(t = 0) = \left(C + \frac{1}{2}mgr\right) \theta_m^2 - mgr \text{ و}$$

من جهة أخرى :  $E_m = E_C + E_p$  أي أن  $E_C = E_m - E_p$

$$E_C = \left(C + \frac{1}{2}mgr\right) \theta_m^2 - mgr - \left(C + \frac{1}{2}mgr\right) \theta^2 + mgr$$

$$E_C = \left(C + \frac{1}{2}mgr\right) [\theta_m^2 - \theta^2]$$

$$\text{نضع : } K = \left(C + \frac{1}{2}mgr\right)$$

$$E_C = K(\theta_m^2 - \theta^2)$$

5 - تعبير الطاقة الميكانيكية :

من خلال ما سبق لدينا :

$$E_m(t) = \left(C + \frac{1}{2}mgr\right) \theta_m^2 - mgr$$

$$E_m(t) = K\theta_m^2 - mgr$$