

تطبيقات قانون نيوتن : الحركات المستوية

الدرس

I - حركة قذيفة في مجال الثقالة المنتظم

نسمي قذيفة كل جسم تم إرساله من سطح الأرض بسرعة بدئية \vec{v}_0 على أن يبقى قريبا منه. خلال هذه الدراسة ، نهمل قوى الاحتكاك مع الهواء ، ونعتبر أن القذيفة خاضعة لوزنها فقط أي حركتها في سقوط حر .

1 - متجهة التسارع

نرسل من نقطة O قذيفة (كرة) ذات كتلة m بسرعة بدئية \vec{v}_0 غير رأسية أي أنها تكون زاوية α مع المستوى الأفقي Oxy ، نسمي الزاوية α بزواوية القذف. نعتبر أن مجال الثقالة منتظم .

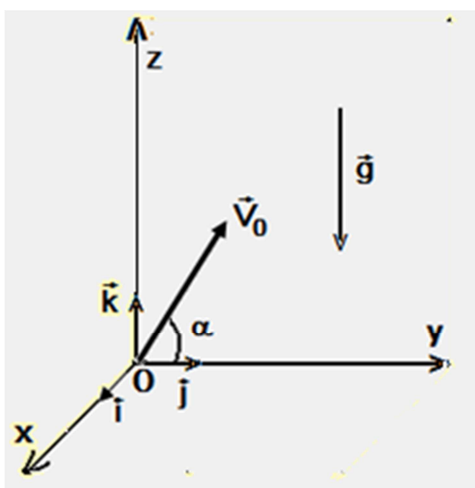
ندرس حركة القذيفة في مرجع أرضي نعتبره غاليليا ، بحيث نعلم مواضع G مركز قصور القذيفة في كل لحظة بإحداثياتها في معلم متعامد وممنظم $\mathcal{R}(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ مرتبط بالمرجع الأرضي .

الشروط البدئية : عند اللحظة $t=0$ لدينا : مركز قصور القذيفة في النقطة O ذي الإحداثيات :

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \\ z_0 = 0 \end{cases}$$

ومتجهة سرعتها :

$$\vec{V}_G \begin{cases} V_{0x} = 0 \\ V_{0y} = V_0 \cos \alpha \\ V_{0z} = V_0 \sin \alpha \end{cases}$$



نطبق القانون الثاني لنيوتن :

تخضع القذيفة إلى وزنها فقط أي أن $\vec{P} = m \cdot \vec{a}_G$ ومنه $\vec{a}_G = \vec{g}$ (1)

إحداثيات \vec{a}_G في المعلم $\mathcal{R}(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$:

على المحور (O, \vec{i}) لدينا $a_x = 0$

على المحور (O, \vec{j}) لدينا $a_y = 0$

على المحور (O, \vec{k}) لدينا $a_z = -g$

أي أن متجهة التسارع \vec{a}_G رأسية منحاهها من الأعلى نحو الأسفل ومنظمها يساوي عدديا منظم متجهة الثقالة \vec{g} .

2 - متجهة السرعة

لدينا حسب متجهة التسارع :

$$\begin{cases} \frac{dv_x}{dt} = 0 \\ \frac{dv_y}{dt} = 0 \\ \frac{dv_z}{dt} = -g \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_x = C_1 \\ v_y = C_2 \\ v_z = -gt + C_3 \end{cases}$$

C_1, C_2, C_3 ثوابت تحدد انطلاقا من

الشروط البدئية .

بما أن متجهة السرعة البدئية توجد في

المستوى (Oyz) عند اللحظة $t_0 = 0$

فإن :

$$\begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 = v_0 \cos \alpha \\ C_3 = v_0 \sin \alpha \end{cases} \quad \text{و بالتالي لدينا} \quad \vec{v}_0 \begin{cases} v_{0x} = 0 \\ v_{0y} = v_0 \cos \alpha \\ v_{0z} = v_0 \sin \alpha \end{cases}$$

أي أن إحداثيات متجهة السرعة في المعلم $\mathcal{R}(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ هي :

$$(2) \vec{v}_G \begin{cases} v_x = 0 \\ v_y = v_0 \cos \alpha \\ v_z = -gt + v_0 \sin \alpha \end{cases}$$

3 _ المعادلات الزمنية للحركة :
لدينا :

$$\begin{cases} v_x = \frac{dx}{dt} = 0 \\ v_y = \frac{dy}{dt} = v_0 \cos \alpha \\ v_z = \frac{dz}{dt} = -gt + v_0 \sin \alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = C_4 \\ y = (v_0 \cos \alpha)t + C_5 \\ z = -\frac{1}{2}gt^2 + (v_0 \sin \alpha)t + C_6 \end{cases}$$

بحيث أن C_4, C_5, C_6 توابث يجب تحديدها انطلاقا من الشروط البدئية أي أنه في اللحظة $t_0 = 0$ لدينا :

$$\begin{cases} C_4 = 0 \\ C_5 = 0 \\ C_6 = 0 \end{cases} \quad \text{إذن} \quad \overline{OG_0} \begin{cases} 0 \\ 0 \\ 0 \end{cases}$$

وبالتالي تكون إحداثيات النقطة G في اللحظة t في المعلم $\mathcal{R}(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ هي :

$$\overline{OG} \begin{cases} x = 0 \\ y = (v_0 \cos \alpha)t \quad (1) \\ z = -\frac{1}{2}gt^2 + (v_0 \sin \alpha)t \quad (2) \end{cases}$$

من خلال هذه المعادلات يتبين أن حركة G تتم في المستوى الرأسي (Oyz) نقول أن **الحركة مستوية** .

_ على المحور (O, \vec{j}) ، حركة G **مستقيمة منتظمة** .

_ على المحور (O, \vec{k}) ، حركة **مستقيمة متغيرة بانتظام** .

4 _ معادلة المسار

معادلة المسار هي العلاقة التي تجمع بين إحداثيتي النقطة المتحركة G ونحصل عليها بإقصاء المتغير t بين y و z .
من المعادلتين الزمئيتين (1) و (2) نحصل على :

$$y = (v_0 \cos \alpha)t \Rightarrow t = \frac{y}{v_0 \cos \alpha}$$

$$z = -\frac{1}{2}gt^2 + (v_0 \sin \alpha)t$$

أي أن معادلة المسار هي :

$$z = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} y^2 + y \tan \alpha$$

نستنتج أن مسار مركز قصور قذيفة في سقوط حر بسرعة بدئية \vec{v}_0 غير رأسية في مجال الثقالة المنتظم جزء من **شلجم** ينتمي إلى المستوى الرأسي الذي يحتوي على المتجهة \vec{v}_0 .

5 _ بعض مميزات المسار

أ _ **قمة المسار (la flèche) هي**

أعلى نقطة يصل إليها مركز قصور القذيفة .

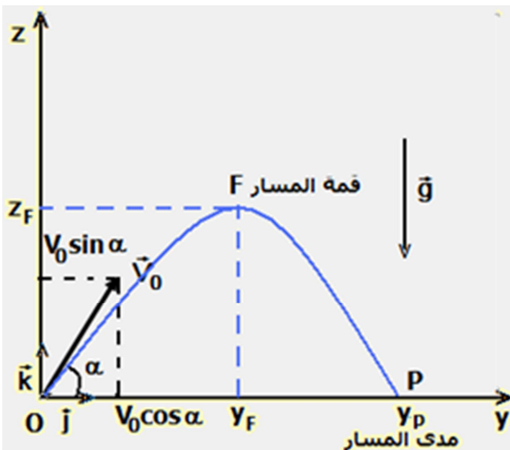
عند وصول مركز قصور القذيفة إلى قمة المسار F تكون لدينا $\frac{dz}{dt} = 0$

بالنسبة ل $y = y_F$

من خلال المعادلة (2) نحصل على :

$$\frac{dz}{dt} = -gt_F + v_0 \sin \alpha = 0$$

$$t_F = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}$$



نعوض t_F في المعادلة (1)

$$y_F = \frac{v_0^2 \cos \alpha \sin \alpha}{g} \Rightarrow y_F = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g}$$

$$z_F = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}$$

ملحوظة : نحصل على أقصى قيمة لقيمة المسار إذا كان $\alpha = \frac{\pi}{2}$ أي في حالة إرسال قذيفة رأسيا نحو الأعلى .

ب - المدى *la portée*

هو المسافة بين الموضع G_0 لمركز قصور القذيفة لحظة انطلاقها والموضع P للنقطة G أثناء سقوط القذيفة بحيث تنتمي P إلى المحور الأفقي الذي يشمل G_0 .

لتكن y_p و z_p إحداثيتا النقطة P ، لدينا : $z_p = 0$

أي أن :

$$y_P \left(-\frac{g}{2v_0^2 \cos \alpha} y_p + \tan \alpha \right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} y_p = 0 \\ \text{ou} \\ y_p = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} \end{cases}$$