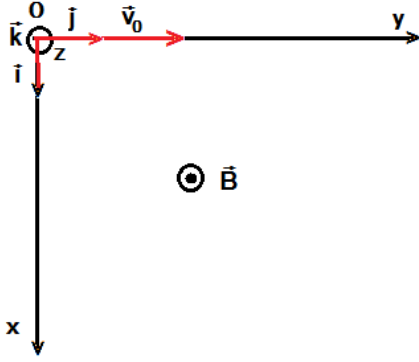


تصحيح التمرين 4

1 - المعادلة التفاضلية التي تحققها $y(t)$:



دراسة حركة في المعلم $\mathcal{R}(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ مرتبط بمرجع أرضي والذي نعتبره غاليليا تخضع الدقيقة إلى القوى التالية :

وزن الدقيقة والطبي نعتبر شدته مهملة أمام شدة القوة المغناطيسية القوة المغناطيسية \vec{F}

حسب القانون الثاني لنيوتن : $\vec{F} = m\vec{a}$ بحيث أن $\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$ باعتبار أن

$\vec{B} = B\vec{k}$ و $q\vec{v} = q(v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k})$ وبالتالي وحسب الجداء المتجهي فإن

$\vec{F} = qBv_y\vec{i} - qBv_x\vec{j} + 0\vec{k}$ ومنه فإن المعادلات التفاضلية للحركة الدقيقة :

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{q}{m} B \frac{dy}{dt} & (1) \\ \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{q}{m} B \frac{dx}{dt} & (2) \\ \frac{d^2z}{dt^2} = 0 \end{cases}$$

من المعادلة (1) وبالتكامل : $\frac{dx}{dt} = \frac{q}{m} By + C_1$ ، عند اللحظة $t=0$ $v_x=0$ وبالتالي فإن $C_1=0$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \left(\frac{q}{m} B\right)^2 y = 0 \quad \text{أي أن} \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -\left(\frac{q}{m} B\right)^2 y$$

2 - حل المعادلة التفاضلية :

حل المعادلة التفاضلية يكتب على الشكل التالي : $y(t) = Y_m \cos(\omega t + \varphi)$

الحل يحقق المعادلة التفاضلية : $\frac{d^2y}{dt^2} = -\omega^2 Y_m \cos(\omega t + \varphi)$ أي أن $\frac{d^2y}{dt^2} = -\omega^2 y(t)$ ومنه فإن $\omega^2 = \left(\frac{qB}{m}\right)^2$ أي أن $\omega = \frac{qB}{m}$

تحديد Y_m و φ :

عند اللحظة $t=0$ لدينا $\vec{v} = v_0 \vec{j}$ و $y_0 = 0$ ومنه فإن $Y_m \cos \varphi = 0$ و $-Y_m \omega \sin \varphi = v_0$ أي أن $\varphi = \pi/2$ أو $\varphi = -\pi/2$

وبما أن $v_0 > 0$ و $\omega > 0$ و $Y_m > 0$ فإن $\sin \varphi < 0$ أي أن $\varphi = -\pi/2$ و $Y_m = v_0 / \omega$

$$\text{أي أن} \quad y(t) = \frac{v_0}{\omega} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t)$$

3 - تعبير $x(t)$:

لدينا حسب السؤال الأول أن $\frac{dx}{dt} = \frac{q}{m} By = \frac{qB}{m} \times \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t)$ ومنه بالتكامل : $x = \frac{qBv_0}{m\omega^2} \cos(\omega t) + C_2$ وعند $t=0$ فإن

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega} (1 - \cos(\omega t)) \quad \text{ومنه فإن} \quad x=0 \Rightarrow C_2 = \frac{qv_0 B}{m\omega^2} = \frac{v_0}{\omega}$$

4 - تحديد $z(t)$: لدينا $a_z = 0$ أي أن $v_z = C_3 = 0$ ومنه فإن $z = C_4 = 0$ أي أن $z(t) = 0$ ، حركة الدقيقة في المجال

المغناطيسي \vec{B} مستوية في المستوى Oxy

معادلة المسار :

$$\left\{ \begin{array}{l} X = \left(x - \frac{v_0}{\omega}\right) = -\frac{v_0}{\omega} \cos(\omega t) \\ Y = y = \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t) \\ Z = z = 0 \end{array} \right. \quad \text{أي أن} \quad X^2 + Y^2 = \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2$$

و مركزها $R = \frac{v_0}{\omega}$

$$\vec{a} \begin{cases} \ddot{x} = v_0 \omega \cos \omega t \\ \ddot{y} = -v_0 \omega \sin \omega t \\ \ddot{z} = 0 \end{cases} \quad \text{ومتجهة التسارع هي} \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = v_0 \sin \omega t \\ \dot{y} = v_0 \cos \omega t \\ \dot{z} = 0 \end{array} \right. \quad \text{ومتجهة السرعة} \quad \left[O \left(\frac{v_0}{\omega}, 0 \right) \right]$$

التمرين إضافي***:

نعتبر مضلي ولوازمه في سقوط رأسي في الهواء قبل فتح مضلته .

نفترض أن قوة الاحتكاك المائع التي تخضع لها المجموعة { المضلي + المضلة مغلقة } تعبيرها كالتالي $\vec{f} = -\lambda\vec{v}$

بحيث أن سرعة المجموعة خلال السقوط و $\lambda = 14 \text{SI}$ ثابتة .

عند اللحظة t_0 يفتح المضلي مضلته . باعتبار أن فتح المضلة يكون لحظيا وأن المضلي يصل السرعة الحدية للسقوط قبل فتح

المضلة . نفترض أن قوة الاحتكاك المائع التي تخضع لها المجموعة في هذه الحالة هي : $-\mu\vec{v}$ حيث $\mu = 350 \text{SI}$,

1 - حدد وحدتي λ و μ في النظام العالمي للوحدات .

2 - ما هي السرعة الحدية v_0 لسقوط المضلي قبل فتح مضلته ؟

3 - ماهي السرعة الحدية الجديد v_1 للسقوط عندما يفتح المضلي مضلته ؟

4 - بتطبيق القانون الثاني لنيوتن على المجموعة أكتب المعادلة التفاضلية التي تحققها $u(t) = v(t) - v_1$.

5 - أوجد حل هذه المعادلة التفاضلية واستنتج منحنى $v(t)$ بدلالة الزمن بالنسبة ل $t > t_0$

نعطي : كتلة المجموعة { المضلي + المضلة مغلقة } : $m = 70 \text{kg}$ شدة وجال الثقالة : $g = 10 \text{m/s}^2$

الحل :

1 - باستعمال معادلة الأبعاد بحيث أن القوة f وحدتها في النظام العالمي للوحدات kg.m/s^2 والسرعة v وحدتها m/s

وبالتالي فإن وحدة λ و μ هي $[\lambda] = [\mu] = \text{kg/s}$

2 - عند وصول المضلي إلى سرعته الحدية في كلتا الحالتين : $\lambda v_0 = mg$ أي أن $v_0 = \frac{mg}{\lambda}$ أي أن $v_0 = 50 \text{m/s} = 180 \text{km/h}$

3 - $\mu v_1 = mg$ أي أن $v_1 = \frac{mg}{\mu}$ أي أن $v_1 = 2 \text{m/s} = 7,20 \text{km/h}$

4 - نطبق القانون الثاني لنيوتن في مرجع مرتبط بسطح الأرض والذي نعتبره غاليليا

تخضع المجموع إلى القوى التالية : وزن المجموعة \vec{P} وقوة الاحتكاك الهواء $f = \mu v$ ونهمل قوة دافعة ارخميدس

$\vec{P} + \vec{f} = m\vec{a}_G$ باختيار محور Oz موجه نحو الأسفل بحيث نسقط عليه العلاقة المتجهية : $mg - \mu v = ma_G$ وبالتالي فإن

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{\mu}{m}v \quad \text{ونعلم أن } g = \frac{\mu v_1}{m} \quad \text{أي أن } \frac{dv}{dt} = \frac{\mu v_1}{m} - \frac{\mu}{m}v \quad , \quad \text{نضع } u = v(t) - v_1 \quad \text{أي أن } \frac{du}{dt} = \frac{dv}{dt} - \frac{dv_1}{dt} \quad \text{أي أن } \frac{du}{dt} + \frac{\mu u}{m} = 0$$

5 - حل المعادلة التفاضلية هو : $u(t) = u_0 \exp\left(-\frac{\mu}{m}t\right)$ وحسب الشروط البدئية عند $t = 0$ لدينا $u(0) = v(0) - v_1 = v_0 - v_1$

وبالتالي يصبح الحل : $v(t) = (v_0 - v_1) \exp\left(-\frac{\mu}{m}t\right) + v_1$ أي أن

