

Mouvement de rotation d'un solide autour d'un axe fixe

Chapitre 15

allal Mahdade

Groupe scolaire La Sagesse Lycée qualifiante

2 avril 2017

Sommaire

Mouvement de rotation d'un solide autour d'un axe fixe

allal Mahdade

Introduction

Abscisse angulaire, vitesse angulaire et accélération angulaire

Relation fondamentale de la dynamique de rotation

Application : mouvement d'un système mécanique en translation et en rotation autour d'un axe fixe

1 Introduction

2 Abscisse angulaire, vitesse angulaire et accélération angulaire

3 Relation fondamentale de la dynamique de rotation

4 Application : mouvement d'un système mécanique en translation et en rotation autour d'un axe fixe

Sommaire

Mouvement de rotation d'un solide autour d'un axe fixe

allal Mahdade

Introduction

Abscisse angulaire, vitesse angulaire et accélération angulaire

Relation fondamentale de la dynamique de rotation

Application : mouvement d'un système mécanique en translation et en rotation autour d'un axe fixe

- 1 Introduction
- 2 Abscisse angulaire, vitesse angulaire et accélération angulaire
- 3 Relation fondamentale de la dynamique de rotation
- 4 Application : mouvement d'un système mécanique en translation et en rotation autour d'un axe fixe

Sommaire

Mouvement de rotation d'un solide autour d'un axe fixe

allal Mahdade

Introduction

Abscisse angulaire, vitesse angulaire et accélération angulaire

Relation fondamentale de la dynamique de rotation

Application : mouvement d'un système mécanique en translation et en rotation autour d'un axe fixe

- 1 Introduction
- 2 Abscisse angulaire, vitesse angulaire et accélération angulaire
- 3 Relation fondamentale de la dynamique de rotation
- 4 Application : mouvement d'un système mécanique en translation et en rotation autour d'un axe fixe

Sommaire

Mouvement de rotation d'un solide autour d'un axe fixe

allal Mahdade

Introduction

Abscisse angulaire, vitesse angulaire et accélération angulaire

Relation fondamentale de la dynamique de rotation

Application : mouvement d'un système mécanique en translation et en rotation autour d'un axe fixe

- 1 Introduction
- 2 Abscisse angulaire, vitesse angulaire et accélération angulaire
- 3 Relation fondamentale de la dynamique de rotation
- 4 Application : mouvement d'un système mécanique en translation et en rotation autour d'un axe fixe

Introduction

Mouvement de rotation d'un solide autour d'un axe fixe

allal Mahdade

Introduction

Abscisse angulaire, vitesse angulaire et accélération angulaire

Relation fondamentale de la dynamique de rotation

Application : mouvement d'un système mécanique en translation et en rotation autour d'un axe fixe



Sous l'action d'un ensemble de forces , la grande roue est animée d'un mouvement de rotation autour d'un axe fixe . Un tel mouvement est caractérisé , à chaque instant , par son accélération angulaire
Qu'est ce que l'accélération angulaire ? Quelle relation la relie aux moments des forces appliquées à la grande roue ?

I. Abscisse angulaire, vitesse angulaire et accélération angulaire

Mouvement de rotation d'un solide autour d'un axe fixe

allal Mahdade

Introduction

Abscisse angulaire, vitesse angulaire et accélération angulaire

Relation fondamentale de la dynamique de rotation

Application : mouvement d'un système mécanique en translation et en rotation autour d'un axe fixe

1. rappel : définition

Un solide indéformable a un mouvement de rotation autour d'un axe fixe (Δ) si tous les points décrivent des trajectoires circulaires centrées sur l'axe (Δ) sauf les points qui appartiennent à cet axe. (exemple la grande roue)

I. Abscisse angulaire, vitesse angulaire et accélération angulaire

Mouvement de rotation d'un solide autour d'un axe fixe

allal Mahdade

Introduction

Abscisse angulaire, vitesse angulaire et accélération angulaire

Relation fondamentale de la dynamique de rotation

Application : mouvement d'un système mécanique en translation et en rotation autour d'un axe fixe

3. La vitesse angulaire $\dot{\theta}$

Soit le point M du solide occupe la position M_i à l'instant t_i . et que les date t_{i+1} et t_{i-1} sont très proches et encadrent t_i . On peut calculer la vitesse angulaire de M à l'instant t_i par un encadrement de cette date par t_{i+1} et t_{i-1} où le point M prend les abscisse angulaires θ_{i+1} et θ_{i-1} en l'assimilant à la vitesse angulaire moyenne :

$$\dot{\theta}_m = \frac{\theta_{i+1} - \theta_{i-1}}{t_{i+1} - t_{i-1}}$$

$$\dot{\theta}_m = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

I. Abscisse angulaire, vitesse angulaire et accélération angulaire

Mouvement de rotation d'un solide autour d'un axe fixe

allal Mahdade

Introduction

Abscisse angulaire, vitesse angulaire et accélération angulaire

Relation fondamentale de la dynamique de rotation

Application : mouvement d'un système mécanique en translation et en rotation autour d'un axe fixe

On définit la vitesse angulaire instantanée par

$$\dot{\theta}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta\theta}{\Delta t} \right) = \frac{d\theta}{dt}$$

I. Abscisse angulaire, vitesse angulaire et accélération angulaire

Mouvement de rotation d'un solide autour d'un axe fixe

allal Mahdade

Introduction

Abscisse angulaire, vitesse angulaire et accélération angulaire

Relation fondamentale de la dynamique de rotation

Application : mouvement d'un système mécanique en translation et en rotation autour d'un axe fixe

La vitesse angulaire d'un point d'un solide en mouvement de rotation autour d'axe fixe est , à chaque instant, la dérivé par rapport au temps de l'abscisse angulaire de ce point :

$$\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}.$$

Son unité dans le système international est *rad/s*

I. Abscisse angulaire, vitesse angulaire et accélération angulaire

Mouvement de rotation d'un solide autour d'un axe fixe

allal Mahdade

Introduction

Abscisse angulaire, vitesse angulaire et accélération angulaire

Relation fondamentale de la dynamique de rotation

Application : mouvement d'un système mécanique en translation et en rotation autour d'un axe fixe

Relation entre vitesse linéaire et vitesse angulaire

$s(t)$ est l'abscisse curviligne lié à l'abscisse angulaire par la relation

$$s = r.\theta$$

où r est le rayon de la trajectoire circulaire . On définit la vitesse linéaire

$v = \frac{ds}{dt}$, d'où la relation :

$$\frac{ds}{dt} = r \frac{d\theta}{dt}$$

$$v = r.\dot{\theta}$$

I. Abscisse angulaire, vitesse angulaire et accélération angulaire

Mouvement de rotation d'un solide autour d'un axe fixe

allal Mahdade

Introduction

Abscisse angulaire, vitesse angulaire et accélération angulaire

Relation fondamentale de la dynamique de rotation

Application : mouvement d'un système mécanique en translation et en rotation autour d'un axe fixe

Remarque :

Le vecteur vitesse linéaire \vec{v} est de direction tangentielle à la trajectoire circulaire au point M , dans la base de Frenet on a :

$$\vec{v} = v \cdot \vec{u}$$

I. Abscisse angulaire, vitesse angulaire et accélération angulaire

Mouvement de rotation d'un solide autour d'un axe fixe

allal Mahdade

Introduction

Abscisse angulaire, vitesse angulaire et accélération angulaire

Relation fondamentale de la dynamique de rotation

Application : mouvement d'un système mécanique en translation et en rotation autour d'un axe fixe

4. L'accélération angulaire $\ddot{\theta}$

a. définition :

Soit $\dot{\theta}_i$ la vitesse angulaire du point M à la date t_i et soient $\dot{\theta}_{i+1}$ et $\dot{\theta}^{i-1}$ les vitesses angulaires respectivement aux dates t_{i+1} et t_{i-1} qui sont très proches et qui encadrent la date t_i .

Lorsque $\Delta t = t_{i+1} - t_{i-1}$ tend vers 0, le rapport : $\frac{\Delta\dot{\theta}}{\Delta t} = \frac{\dot{\theta}_{i+1} - \dot{\theta}_{i-1}}{t_{i+1} - t_{i-1}}$ tend vers une limite qu'est la dérivée par rapport au temps de la vitesse angulaire :

$$\ddot{\theta}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta\dot{\theta}}{\Delta t} \right) = \frac{d\dot{\theta}}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

I. Abscisse angulaire, vitesse angulaire et accélération angulaire

Mouvement de rotation d'un solide autour d'un axe fixe

allal Mahdade

Introduction

Abscisse angulaire, vitesse angulaire et accélération angulaire

Relation fondamentale de la dynamique de rotation

Application : mouvement d'un système mécanique en translation et en rotation autour d'un axe fixe

L'accélération angulaire d'un point d'un solide en mouvement de rotation autour d'axe fixe est , à chaque instant, la dérivé par rapport au temps de la vitesse angulaire de ce point :

$$\ddot{\theta} = \frac{d\dot{\theta}}{dt}$$

Son unité dans le système international est rad/s^2

I. Abscisse angulaire, vitesse angulaire et accélération angulaire

Mouvement de rotation d'un solide autour d'un axe fixe

allal Mahdade

Introduction

Abscisse angulaire, vitesse angulaire et accélération angulaire

Relation fondamentale de la dynamique de rotation

Application : mouvement d'un système mécanique en translation et en rotation autour d'un axe fixe

Exercice d'application 1 :

- 1 La vitesse angulaire du point M d'un solide en mouvement de rotation autour d'un axe fixe est $\dot{\theta} = 10\text{rad/s}$;
 - 1 Calculer l'accélération angulaire du point M ;
 - 2 Quelle est la nature du mouvement du point M ?
 - 3 Écrire l'expression de l'abscisse angulaire du point M en fonction du temps , sachant que son abscisse angulaire à l'origine des dates est $\theta_0 = 2\text{rad}$

I. Abscisse angulaire, vitesse angulaire et accélération angulaire

Mouvement de rotation d'un solide autour d'un axe fixe

allal Mahdade

Introduction

Abscisse angulaire, vitesse angulaire et accélération angulaire

Relation fondamentale de la dynamique de rotation

Application : mouvement d'un système mécanique en translation et en rotation autour d'un axe fixe

- 1 L'expression de l'abscisse angulaire du point N d'un solide en rotation autour d'un axe fixe est :

$$\theta(t) = 10t^2 + 40t + 6$$

t est en (s) et θ en rad .

- 1 Déterminer l'expression de la vitesse angulaire du point N en fonction du temps
- 2 Déterminer l'expression de l'accélération angulaire du point N en fonction du temps
- 3 Quelle est la nature du mouvement du point N .

I. Abscisse angulaire, vitesse angulaire et accélération angulaire

Mouvement de rotation d'un solide autour d'un axe fixe

allal Mahdade

Introduction

Abscisse angulaire, vitesse angulaire et accélération angulaire

Relation fondamentale de la dynamique de rotation

Application : mouvement d'un système mécanique en translation et en rotation autour d'un axe fixe

b. les composantes a_T et a_N du vecteur accélération .

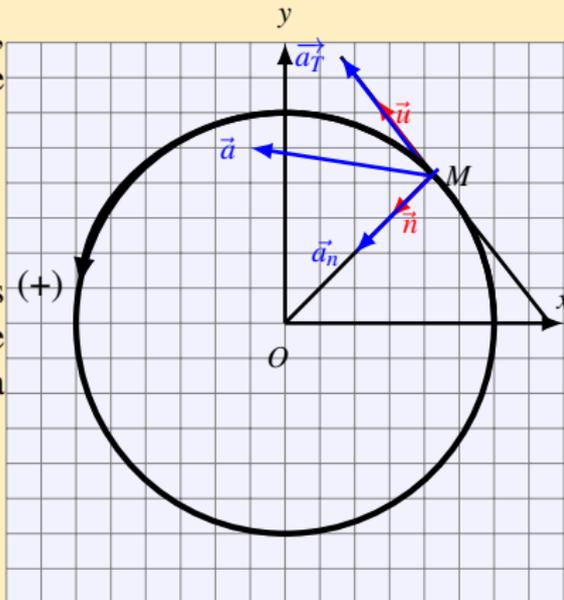
Dans la base de Frenet $M(\vec{u}, \vec{n})$, le vecteur accélération peut s'écrire sous la forme vectorielle suivante :

$$\vec{a} = \vec{a}_N + \vec{a}_T$$

se décompose en deux composantes (+) , composante normale à la trajectoire et une composante tangentielle à la trajectoire ;

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt} \vec{u} + \frac{v^2}{\rho} \vec{n}$$

v est la vitesse du point M à la date t et ρ le rayon de courbure de la trajectoire à l'instant t .



I. Abscisse angulaire, vitesse angulaire et accélération angulaire

Mouvement de rotation d'un solide autour d'un axe fixe

allal Mahdade

Introduction

Abscisse angulaire, vitesse angulaire et accélération angulaire

Relation fondamentale de la dynamique de rotation

Application : mouvement d'un système mécanique en translation et en rotation autour d'un axe fixe

Si le solide est en mouvement de rotation autour d'un axe fixe alors la trajectoire est un cercle de rayon r et de centre O situé sur l'axe (Δ) alors le vecteur \vec{n} est orienté vers O et le rayon de courbure $\rho = r$. Dans ce cas on a :

$$\vec{a} \begin{cases} a_T = \frac{dv}{dt} = r \cdot \frac{d^2\theta}{dt^2} \\ a_N = \frac{v^2}{r} = \frac{(r \cdot \dot{\theta})^2}{r} = r \cdot \dot{\theta}^2 \end{cases}$$

II. Relation fondamentale de la dynamique de rotation

Mouvement de rotation d'un solide autour d'un axe fixe

allal Mahdade

Introduction

Abscisse angulaire, vitesse angulaire et accélération angulaire

Relation fondamentale de la dynamique de rotation

Application : mouvement d'un système mécanique en translation et en rotation autour d'un axe fixe

Cette relation s'applique à un solide en mouvement de rotation autour d'un axe fixe .

II. Relation fondamentale de la dynamique de rotation

Mouvement de rotation d'un solide autour d'un axe fixe
alal Mahdade

Introduction

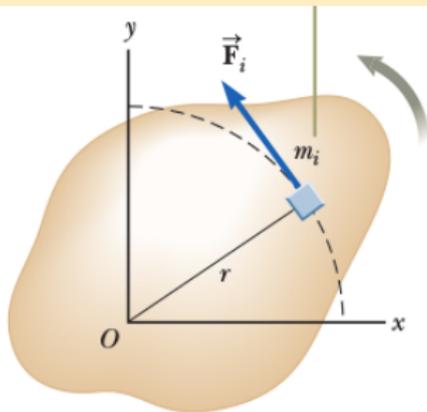
Abscisse angulaire, vitesse angulaire et accélération angulaire

Relation fondamentale de la dynamique de rotation

Application : mouvement d'un système mécanique en translation et en rotation autour d'un axe fixe

1. Énoncé :

Dans un repère lié au référentiel terrestre . Pour un corps solide en rotation autour d'un axe fixe (Δ), la somme algébrique des moments par rapport à l'axe fixe (Δ) de toutes les forces appliquées au solide est égale , à chaque instant , au produit du moment d'inertie J_{Δ} de ce solide par son accélération angulaire $\ddot{\theta}$ soit :



$$\Sigma \mathcal{M}_{\Delta}(\vec{F}_{ext}) = J_{\Delta} \cdot \ddot{\theta}$$

$\Sigma \mathcal{M}_{\Delta}(\vec{F}_{ext})$: exprimer en (N.m)

J_{Δ} en $kg \cdot m^2$

$\ddot{\theta}$ en rad/s^2

II. Relation fondamentale de la dynamique de rotation

Mouvement de rotation d'un solide autour d'un axe fixe

allal Mahdade

Introduction

Abscisse angulaire, vitesse angulaire et accélération angulaire

Relation fondamentale de la dynamique de rotation

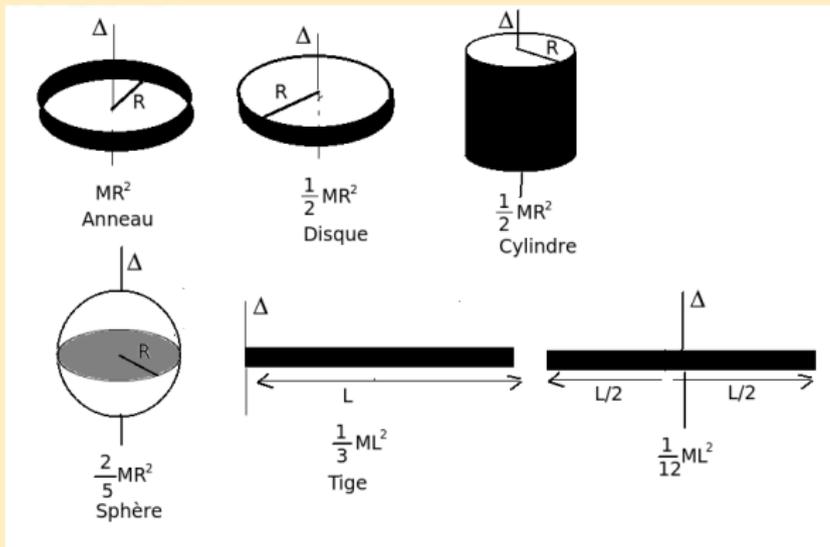
Application : mouvement d'un système mécanique en translation et en rotation autour d'un axe fixe

Cas particulier :

- * Si $\ddot{\theta} = 0$, le solide a un mouvement de rotation uniforme autour de l'axe (Δ)
- * Si $\ddot{\theta} = Cte \neq 0$, le solide est animé d'un mouvement de rotation uniformément varié autour de l'axe (Δ)

II. Relation fondamentale de la dynamique de rotation

2. Moments d'inertie de quelques solides particuliers



Le moment d'inertie d'un solide dépend de la masse du solide et de ses dimensions .

Mouvement de rotation d'un solide autour d'un axe fixe

allal Mahdade

Introduction

Abscisse angulaire, vitesse angulaire et accélération angulaire

Relation fondamentale de la dynamique de rotation

Application : mouvement d'un système mécanique en translation et en rotation autour d'un axe fixe

III. Application : mouvement d'un système mécanique en translation et en rotation autour d'un axe fixe

Mouvement de rotation d'un solide autour d'un axe fixe

allal Mahdade

Introduction

Abscisse angulaire, vitesse angulaire et accélération angulaire

Relation fondamentale de la dynamique de rotation

Application : mouvement d'un système mécanique en translation et en rotation autour d'un axe fixe

Voir la série d'exercices